КРИТЕРИЙ ВЛОЖИМОСТИ (r,q)-ПОЛИЦИКЛОВ

М.Деза, М.И.Штогрин[1]

Определения (r,q)-полициклов и терминология даны в [1-4]. Обозначения элементарных эллиптических полициклов взяты из [4]. В работе [3] мы рассматривали изометрические (или со шкалой λ) вложения графических метрик полициклов в гиперкубы. В частности, там среди эллиптических полициклов указаны два собственных (5,3)-полицикла с $p_5 = 6$, таких, что любой (5,3)-полицикл, отличный от остова додекаэдра (5^3), вложи́м (причем со шкалой $\lambda = 2$), если и только если он не содержит ни одного из двух этих полициклов в качестве индуцированного подграфа, а именно: E_4 и $D \cup E_2 \cup D$, см. [4, рис.5] и [3, теорема 2]. Имеет место аналогичная теоремы для (3,5)-полициклов, завершающая вопрос о вложимости всех (r,q)-полициклов (для $(r,q) \neq (5,3)$, $(3,5)$, невложимы лишь 3 полицикла – куб без ребра, октаэдр без ребра и октаэдр с расщеплённой вершиной):

Теорема. *Любой $(3,5)$-полицикл, отличный от рёберного остова икосаэдра (3^5) и остова икосаэдра без вершины $(3^5)-v$, вложи́м (причём со шкалой $\lambda = 2$), если и только если он не содержит в качестве индуцированного подграфа ни одного из двух собственных $(3,5)$-полициклов с десятью вершинами, а именно: c_3 и $d \cup e_2 \cup d$.*

Важным необходимым условием изометрической вложимости графа G в примитивную кубическую решетку Z_n со шкалой λ является выполнение 5-*гонального неравенства* [5]

$$ab + ac + bc + xy \leq ax + bx + cx + ay + by + cy$$

для попарных расстояний между любыми пятью его вершинами a, b, c, x, y; нарушение 5-гонального неравенства – не 5-гональность – влечёт невложимость.

Клеточный комплекс, состоящий из всех вершин, рёбер и граней (r,q)-полицикла, *не* инцидентных с его краем, назовём его *ядром.* Полицикл с непустым связным ядром назовём *нетривиальным элементарным полициклом*, если все его грани инцидентны с его ядром; из него нельзя удалить ни одну грань, не уменьшив при этом ядра. Отдельный r-угольник – это *тривиальный элементарный полицикл* с пустым ядром. Любой r-угольник инцидентен лишь с одной связной компонентой ядра при всех эллиптических параметрах $(r,q) = (3,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(4,3)$, $(5,3)$, так как кратчайший рёберный путь между любыми двумя вершинами r-угольника целиком находится внутри объединения двух звёзд r-угольников с центрами в этих вершинах. Все инцидентные с непустой связной компонентой ядра r-угольники составляют *нетривиальное элементарное слагаемое.*

Лемма. *Любой (r,q)-полицикл с эллиптическими параметрами (r,q) однозначно представляется в виде объединения элементарных слагаемых – тривиальных и максимальных нетривиальных элементарных подполициклов, попарно не имеющих общих граней.*

Примечание. Любое элементарное слагаемое в объемлющем эллиптическом полицикле является изометрическим (в смысле графической метрики).

Доказательство теоремы. Все элементарные слагаемые (3,5)-полициклов представлены в [4, рис.6], оттуда взяты их обозначения. Два полицикла $a_1 = (3^5)$ и $a_5 = (3^5)-v$, содержащие не 5-гональный подполицикл c_3 как индуцированный, вложимы. Два полицикла $a_5 \cup d$ и $d \cup a_5 \cup d$, содержащие не 5-гональный подполицикл $d \cup e_3 \cup d$ как индуцированный, напротив, невложимы (не 5-гональны). Других $(3,5)$-полициклов, содержащих a_5 в качестве элементарного слагаемого, нет. Полициклы a_2, a_3, a_4, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 имеют среди своих изометрических подполициклов хотя бы один не 5-гональный полицикл c_3. В силу этого и примечания произвольный $(3,5)$-полицикл (его параметры эллиптические), содержащий любой из этих полициклов в качестве элементарного слагаемого, не 5-гонален. Других $(3,5)$-полициклов, содержащих подполицикл c_3, не существует.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 02-01-00803, и Фонда поддержки ведущих научных школ, грант 00-15-96011.

Полициклы e_i, $i \geq 4$, b_1 и a_6 содержат изометрический не 5-гональный подполицикл $d \cup e_3 \cup d$. В силу этого и примечания произвольный $(3,5)$-полицикл, содержащий в качестве элементарного слагаемого любой из них (полицикл a_6 нерасширяем), не 5-гонален.

Осталось исследовать $(3,5)$-полициклы с элементарными слагаемыми c_4, d, e_1, e_2, e_3. Мы докажем, что при отсутствии подполицикла $d \cup e_2 \cup d$ они вложимы. На самом деле мы докажем, что любая альтернированная зона задаёт выпуклый разрез (определение см. ниже); этого вполне достаточно для вложимости, см. [6].

Выберем в (3,5)-полицикле любой треугольник (мы полагаем, что его основание снизу и горизонтально). Возьмём смежный по боковой стороне второй треугольник (его основание сверху), с ним смежный по боковой стороне третий треугольник (его основание опять снизу), и т.д. Продолжив эту цепочку треугольников столько, сколько это возможно, вправо и влево по горизонтали, получим цепочку треугольников, называемую *альтернированной зоной*; все боковые стороны треугольников этой зоны суть *рёбра зоны*.

Пусть граф G представляет собою рёберный остов (3,5)-полицикла. После удаления из графа G всех рёбер зоны остаток распадается на два связных графа G_1 и G_2. Если каждый кратчайший рёберный путь в графе G между любыми двумя вершинами, принадлежащими подграфу G_i при любом фиксированном $i = 1, 2$, состоит только из рёбер этого подграфа G_i, то мы говорим, что зона осуществляет *выпуклый разрез* данного (3,5)-полицикла.

Возьмём любую альтернированную зону. Боковые стороны треугольника лежат внутри зоны, лишь крайняя левая и крайняя правая из них суть торцы зоны; основание треугольника лежит на краю зоны. Пусть основание треугольника принадлежит ядру. Тогда полицикл e_2, ядром которого служит это основание, есть подполицикл данного $(3,5)$-полицикла. Лишь по одному ребру полицикла e_2, оба конца которого имеют степень 3, к нему может примыкать треугольник d (полицикл $d \cup e_2 \cup d$ по условиям теоремы запрещён); другое такое ребро полицикла e_2 всегда представляет собою торец зоны. Если на краю зоны нет двух оснований подряд, принадлежащих ядру, то ещё одно такое основание может встретиться на краю зоны лишь у другого её торца. Все вершины на краях зоны, не принадлежащие этим основаниям из ядра, хотя бы через одну лежат на краю объемлющего $(3,5)$-полицикла. В силу этого и примечания зона задаёт выпуклый разрез. Если же на краю зоны два основания подряд принадлежат ядру, то зона имеет всего 8 рёбер; её торцы суть оба ребра элементарного полицикла e_3 с концами степени 3. Эта зона в силу примечания опять задаёт выпуклый разрез. Теорема доказана.

Замечание. Полициклы E_4, $D \cup E_2 \cup D$, c_3, $d \cup e_2 \cup d$ являются частичными, но не изометрическими подграфами в остовах (5^3) и (3^5); из них индуцированными являются только элементарные полициклы E_4 и c_3. Среди полициклов, данных в [4, рис.5 и рис.6], вложимы в полукубы (т.е. изометрически со шкалой $\lambda = 2$ вложимы в гиперкубы) только полициклы $A_1 \supset A_5$, $C_3 \supset E_3 \supset E_2 \supset E_1 \supset D$ и $a_1 \supset a_5 \supset b_4 \supset c_4$, $e_3 \supset e_2 \supset e_1 \supset d$; знак $\supset$ означает «надполицикл содержит подполицикл». Любой вложимый конечный (r,q)-полицикл вложи́м в $(\frac{k}{2} + z)$-мерный куб при чётном r и вложи́м со шкалой $\lambda = 2$ в $(k+z)$-мерный куб при нечётном r; здесь k – периметр полицикла, а z – число замкнутых зон (т.е. циклов, состоящих из противоположных рёбер граней, не включающих внешнюю грань).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Деза М., Штогрин М.И.// УМН. 2000. Т.55, вып.1. С.179-180. [2] Штогрин М.И.// УМН. 2000. Т.55, вып.2. С.155-156. [3] Деза М., Штогрин М.И.// УМН. 2000. Т.55, вып.6. С.159-160. [4] Deza M., Shtogrin M.I.// Journal of Geometry and Physics. 2002. Vol. 40. pp.302-319. [5] Тылкин М.Е.// ДАН. 1960. Т.134, N 5. С.1037-1040. [6] Chepoi V., Deza M., Grishukhin V.P.// Disc. Appl. Math. 1997. Vol.80. pp.3-19.

Ecole Normale Supérieure and CNRS, Paris;
Математический институт им.В.А.Стеклова РАН, Москва.

Принято редакцией
15.04.2002